

Całki nieoznaczone podstawowych funkcji elementarnych

$$1. \int 0 dx = c \quad c = \text{constans}$$

$$2. \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$3. \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$5. \int e^x dx = e^x + c$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$8. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$$

$$9. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c$$

$$10. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\text{albo} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + c$$

$$11. \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\text{albo} \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arcctg} x + c$$

$$12. \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c$$

$$13. \int \sin(\alpha x) dx = -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

$$\frac{\text{dzielna}}{\text{dzielnik}} = \text{iloraz} + \frac{\text{reszta}}{\text{dzielnik}}$$

$$\int \frac{A dx}{ax^2 + bx + c} \rightarrow \operatorname{arctg}(\dots)$$

dla $\Delta < 0$

Liniowość całki nieoznaczonej

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx \quad c \in \mathbb{R}$$

Całkowanie ułamków prostych

$$\int \frac{A}{\cos} = A \ln |\cos| + c$$

Całkowanie przez części

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Postać kanoniczna

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Postać iloczynowa

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{gdzie} \quad \int f(x) dx = F(x) + c$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx \quad c = \text{constans}$$

całkowanie przez części

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx$$

$$F[x]_a^b = F(b) - F(a)$$

całkowanie przez podstawienie

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) \cdot g'(t) dt \quad g(\alpha) = a \quad i \quad g(\beta) = b$$

pole trapezu krzywoliniowego

$$P = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx \quad \text{wzglede} \text{m} \text{osi } X$$

$$P = \int_p^q (g(y) - f(y)) dx \quad \text{wzglede} \text{m} \text{osi } Y$$

długość łuku krzywej

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

objętość bryły obrotowej – obrót OX

$$|V| = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

pole powierzchni obrotowej

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

objętość bryły obrotowej – obrót OY

$$|V| = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \quad f(x) \geq 0$$

pole powierzchni obrotowej

$$|\Sigma| = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

przykłady :

$$1. \int \frac{2x+3}{x^2+4x+c} dx$$

$$| 2x+3 = A(x^2+4x+c) + B$$

$$| 2x+3 = A(2x+4) + B \quad \text{wymnozyc yporównaci wyliczyc}$$

$$2. \int \frac{1}{(x+3)^2+2} dx$$

$$| x+3 = \sqrt{2} t$$

podstawic

$$| dx = \sqrt{2} dt$$

$$3. \int \frac{1}{x^2-2x+5} dx$$

$$| \Delta < 0 \text{ postackanoniczna}$$